# Алгоритм Евклида

## Наибольший общий делитель

*Наибольший общий делитель* натуральных чисел $a$ и $b$ или НОД$(a, b)$ – это наибольшее число, на которое делится и $a$, и $b$. Если НОД$(a, b) = 1$, то говорят, что числа $a$ и $b$ взаимно просты.

1. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a \pm b, b)$ для любых $a, b \in \mathbb{N}$.
2. Найдите НОД$(2173, 2419)$.
3. Найдите целые числа $x$ и $y$ такие, что $2173x + 2419y =$ НОД$(2173, 2419)$.
4. Докажите, что $\min\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\} =$ НОД$(a, b)$.
5. От клетчатого листа бумаги размера $a \times b$ отрезают квадрат максимальной площади, содержащий угловую клетку, после чего продолжают ту же операцию с оставшейся частью. Так делают, пока не получится квадрат. Выразите его сторону через $a$ и $b$.
6. Докажите равенство НОД$(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(m,n)} - 1$ при всех натуральных $m$, $n$ и $a > 1$.
7. Докажите, что дроби $\frac{2n+13}{n+7}$ и $\frac{2n^2-1}{n+1}$ несократимы при любом $n \in \mathbb{N}$.
8. Найдите все целые числа $n$, при которых число $\frac{n^4+1}{n^2+n+1}$ также целое.
9. Найдите все пары $(n, d)$ натуральных чисел, таких что $d$ – делитель числа $n$, а $nd + 1$ – делитель числа $n^2 + d^2$.
10. Пусть $n$ и $d$ — натуральные числа, такие что $d > n > 1$ и $d \mid n^2 + 1$. Докажите, что $d \geqslant n + \sqrt{n+1}$.
11. На доске записаны два различных натуральных числа: $a$ и $b$. Каждую секунду меньшее из записанных чисел стирается и вместо него записывается число $\frac{ab}{|a-b|}$. Этот процесс продолжается, пока на доске не будут записаны два равных числа. Докажите, что процесс когда-нибудь завершится. Чему будут равны числа в этот момент?

## Основная теорема арифметики

12. Докажите, что, если произведение $ab$ натуральных чисел делится на простое число $p$, то на $p$ делится хотя бы одно из чисел $a$ и $b$.
13. Докажите, что каждое натуральное число, большее единицы, раскладывается в произведение степеней различных простых множителей однозначно с точностью до порядка следования множителей.
14. Найдите все тройки $(x, p, n)$ натуральных чисел $x$ и $n$ и простых чисел $p$, для которых $x^3 + 3x + 14 = 2p^n$.
15. Найдите все натуральные числа $n$ и $m$ такие, что $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.
16. Найдите все пары $(p, q)$ простых чисел такие, что $p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$.